

基于受限广义布尔函数的稀疏互补集的构造

彭秀平, 王雪健, 蔡德娇

(燕山大学信息科学与工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 为了满足特定通信与雷达应用中的频谱约束要求, 给出了稀疏互补集的这类新型序列集, 并提出了一种基于受限广义布尔函数的稀疏互补集构造方法, 该序列集具有良好的非周期自相关特性和非周期互相关零相关区特性。基于受限广义布尔函数理论, 通过改变受限变量, 可实现序列长度、零相关区宽度以及零元素位置和数量的灵活调整。该构造方法使稀疏互补集能适应多样化的频谱需求, 且在满足 m 和 v 奇偶性不同的条件下, 序列集的峰值平均功率比可小于理论界限。此外, 跟已有文献相比, 构造的稀疏互补集在码率和最小汉明距离方面均具有一定的优势, 有助于提升数据传输效率和系统的纠检错能力。

关键词: 稀疏互补集; 受限广义布尔函数; 峰值平均功率比; 码率; 零相关区

中图分类号: TN911.72

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2025170

Construction of sparse complementary sets based on restricted generalized Boolean function

PENG Xiuping, WANG Xuejian, CAI Dejiao

School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China

Abstract: To meet the spectral constraint requirements in specific communication and radar applications, a novel class of sequence set named sparse complementary set (SCS) and a construction method utilizing restricted generalized Boolean function (RGBF) were presented. These sequence sets were shown to exhibit excellent aperiodic autocorrelation properties and aperiodic cross-correlation zero correlation zone characteristics. Leveraging RGBF theory, the sequence length, zero correlation zone (ZCZ) width, the position and number of zero elements were flexibly adjusted through altering the restricted variables. This construction method was shown to enable SCS to adapt to diverse spectrum management needs, and under conditions where the parity of m and v differed, the peak-to-average power ratio (PAPR) of the sequence sets was found to be lower than the theoretical bound. Furthermore, compared with existing literature, the proposed SCS demonstrates advantages in both code rate and minimum Hamming distance, which contribute to improve data transmission efficiency and enhance error detection and correction capabilities of the system.

Keywords: sparse complementary set, restricted generalized Boolean function, peak-to-average power ratio, code rate, zero correlation zone

收稿日期: 2025-05-08; 修回日期: 2025-09-09

通信作者: 彭秀平, pengxp@ysu.edu.cn

基金项目: 中央引导地方科技发展基金资助项目(No.236Z0403G);河北省自然科学基金资助项目(No.E2024203225, No.2025203049);燕山大学基础创新科研培育基金资助项目(No.2024LGZD001)

Foundation Items: The Central Government Guides Local Science and Technology Development Foundation (No.236Z0403G), The Natural Science Foundation of Hebei Province (No.E2024203225, No.2025203049), The Basic Innovation Research Cultivation Project of Yanshan University (No.2024LGZD001)

0 引言

Golay 互补对 (GCP, Golay complementary pair) 最初由 Golay 提出^[1], 其后被进一步拓展为互补序列集 (CSS, complementary sequence set)^[2]。CSS 中所有序列的非周期自相关和 (AACCS, aperiodic auto correlation sum) 在任意非零时移处都为零, 这一优良特性使其在通信领域展现出了广泛的应用潜力, 包括雷达信号处理^[3]、信道估计^[4]及正交频分复用 (OFDM, orthogonal frequency division multiplexing) 系统的峰值功率控制^[5-7]等关键领域。

当前关于互补序列的研究虽较多, 但大多聚焦于自相关性能, 对 CSS 内序列间的互相关特性关注不足, 这是因为传统研究通常假定 CSS 的序列是在正交的频率或时间信道上传输, 然而实际通信或雷达系统中难以实现完全正交, 信号在传输过程难免发生相互干扰。因此, 具备优良非周期互相关函数 (ACCF, aperiodic cross correlation function) 特性的 CSS 对于抑制系统中干扰尤其重要。为此, 文献[8]中提出了一种高效的优化算法, 用于构建准正交零相关区序列对。该类序列不仅具有接近零的 AACCS 特性, 且其 ACCF 在特定区域内也维持在极低的水平, 用于雷达系统可显著降低系统中的干扰, 提升整体性能。

低峰值平均功率比 (PAPR, peak-to-average power ratio) 是互补序列设计的另一关键指标。由于 GCP 的 PAPR 的上界为 2, 最早被用作 OFDM 系统的传输码字^[5]。Davis 等^[9]提出了基于布尔函数的 Golay 互补对的构造方法, 所得序列被称为标准 Golay 互补对^[10]。为了满足更多的应用需求, Paterson 等^[11]提出了基于广义布尔函数 (GBF, generalized Boolean function) 得到多进制 CSS 的理论。然而, 该类方法所构造的序列长度受限于 2 的幂次, 限制了其实际应用的灵活性。针对该局限, 文献[12-14]提出了非 2 次幂长度的 q 元 CSS 的新构造; 文献[15]进一步提出通过级联 GCP 或 CSS 中序列以构建非 2 次幂长度 CSS 的途径, 该类序列具备低 PAPR 和良好纠错能力, 但在相移键控星座下当码长较长时码率会变得非常低。为提高码率, 文献[16]将多相 Golay 互补序列 (GCS, Golay complementary sequence) 拓展到正交调幅 (QAM, quadrature amplitude modulation) GCS。相较于多相 GCS, QAM GCS 具有更大的集合尺寸和更高的码率, 且 PAPR

仅略有增加。类似地, 文献[17]指出, 在相同的 PAPR 约束下, 采用 16-QAM GCS 的 OFDM 系统相较于仅使用二进制或四进制 GCS 可实现更高的码率传输, 显著提升系统效率。

尽管上述有关 CSS 设计在低 PAPR 和高码率方面取得了一定的进展, 却普遍忽视了 OFDM 系统中频谱零值约束这一实际问题。传统 OFDM 系统中常保留部分子载波不传输信号, 以提升信号处理的精度并抑制干扰^[18]。例如, 直流子载波常置为“频谱零”以消除射频传输过程中 D/A 和 A/D 转换中引入的偏移; 频谱边缘的保护带被置零, 旨在避免临频干扰^[19]; 合理配置零子载波位置还可有利于提升载波频偏估计的精度^[20]。近年来, 随着认知无线电技术的发展, 对满足频谱零值约束 (SNC, spectral null constraint) 的非连续频谱 CSS 的需求日益突出^[21-22]。然而, 传统 CSS 难以直接适用于此类频谱受限场景, 且非连续频谱 CSS 通常伴随更高的 PAPR。因此, 构建在指定子载波位置具备频谱零值、同时保持低 PAPR 的 CSS, 具有重要的理论价值和应用前景。

目前该方向研究成果较少, 主要包括基于受限布尔函数的稀疏互补对^[23]和通过两条序列拼接成一条序列并在中间插零方式构建的互补集^[24]。为此, 本文提出一类新型的复数值稀疏互补集 (SCS, sparse complementary set), 重点研究包含 4 条序列、每条序列含多个零元素的 CSS 的构造方法, 以满足特定频谱约束需求, 并兼具 AACCS 和零相关区 (ZCZ, zero correlation zone) 特性。本文以受限广义布尔函数 (RGBF, restricted generalized Boolean function) 作为理论基础^[12,25], 通过约束特定变量实现对序列集的序列长度、ZCZ 宽度、零元素数量和位置以及 PAPR 灵活控制。该方法可显著提升 SCS 在频谱管理中的适应能力。此外, 随着稀疏信号处理技术的发展, 序列的稀疏性也有助于实现低复杂度、低时延与低存储需求的硬件架构^[26-27], 可进一步拓展其应用潜力。

1 基本概念

本节主要介绍一些与本文相关的序列设计的数学符号和基础理论知识, 这些定义的符号与关键概念将贯穿于全文, 是支撑后续所有研究工作的基础。

1.1 符号定义

符号定义如表 1 所示。

符号	含义
$\mathbb{Z}_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$	模 q 剩余类环
$\zeta = e^{j\frac{2\pi}{q}}$	q 次本原单位根
x^*	复数 x 的共轭
$\ F\ $	序列 F 的二范数
$ \mathcal{F} $	集合 \mathcal{F} 的大小
$\lfloor x \rfloor$	小于或等于 x 的最大整数

1.2 相关函数

定义 1 [28] 设序列 $\mathbf{a} = (a(0), a(1), \dots, a(L-1))$ 和 $\mathbf{b} = (b(0), b(1), \dots, b(L-1))$ 是两条长度为 L 的复值序列，序列 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 在位移 u 处的 ACCF 定义为

$$\rho_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(u) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{L-1-u} a(i)b^*(i+u), & 0 \leq u \leq L-1 \\ \sum_{i=0}^{L-1+u} a(i-u)b^*(i), & -(L-1) \leq u \leq -1 \\ 0, & |u| \geq L \end{cases} \quad (1)$$

当 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 时，称 $\rho_{\mathbf{a}, \mathbf{a}}(u)$ 为序列 \mathbf{a} 的非周期自相关函数 (AACF, aperiodic auto correlation function)，简记为 $\rho_{\mathbf{a}}(u)$ 。

对于任意的复值序列 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 以及位移 u ，均有以下等式成立

$$\rho_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(u) = \rho_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}^*(-u) \quad (2)$$

1.3 稀疏互补序列集

定义 2 设 $\mathcal{F} = \{\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{K-1}\}$ 是 K 条长度为 L 的复数值序列集，其中每条序列均含有 N 个零元素，当以下两个条件成立时

$$\sum_{i=0}^{K-1} \rho_{\mathbf{F}_i}(u) = \begin{cases} 0, & u \neq 0 \\ K(L-N), & u = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\rho_{\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k'}}(u) = \begin{cases} L-N, & u = 0, k = k' \\ 0, & 0 < |u| < Z_A, k = k' \\ 0, & |u| < Z_A, k \neq k' \end{cases} \quad (4)$$

则称序列集 \mathcal{F} 为 SCS，简记为 (K, L, Z_A, S) -SCS，

其中， $k, k' \in \{0, 1, \dots, K-1\}$ ， Z_A 表示 ZCZ 的宽度， $S = \frac{N}{L}$ 表示稀疏度。

当式(3)成立且 $S = 0$ 时，上述 SCS 转化为众所周知的 GCS。

1.4 OFDM 信号的相关性能

设 OFDM 系统的子载波数量为 L ，对于复值序列 $\mathbf{F} = (F(0), F(1), \dots, F(L-1))$ ，其对应的 OFDM 传输信号是下述复包络 $S_F(t)$ 的实部，写为

$$S_F(t) = \sum_{i=0}^{L-1} F(i) e^{j2\pi(f_c + i\Delta f)t}, \quad 0 \leq t < T \quad (5)$$

其中， f_c 表示中心载波频率， $\Delta f = \frac{1}{T}$ 表示子载波间距， T 为 OFDM 信号持续时间。长度为 L 的序列 \mathbf{F} 称为 OFDM 信号的调制序列，调制序列的瞬时能量可表示为

$$P_F(t) = |S_F(t)|^2 \quad (6)$$

序列 \mathbf{F} 的 PAPR 定义为

$$\text{PAPR}(\mathbf{F}) = \frac{\sup_{t \in [0, T]} P_F(t)}{P_{\text{av}}(\mathbf{F})} \quad (7)$$

其中， $P_{\text{av}}(\mathbf{F})$ 是 \mathbf{F} 的平均功率，表示为

$$P_{\text{av}}(\mathbf{F}) = \frac{1}{T} \int_0^T P_F(t) dt = \|\mathbf{F}\|^2 \quad (8)$$

因此，序列集 \mathcal{F} 的 PAPR 定义为

$$\text{PAPR}(\mathcal{F}) = \max_{\mathbf{F}_i \in \mathcal{F}} \text{PAPR}(\mathbf{F}_i) \quad (9)$$

引理 1[29] 设集合 \mathcal{F} 是大小为 K 的 CSS，其中所有序列的长度和能量相同，那么 \mathcal{F} 的 PAPR 的上界为 K 。

为进一步分析本文设计的 CSS 在码率方面的性能，码键控 OFDM 序列的码率定义为

$$R(\mathcal{F}) = \frac{\lfloor \log_q |\mathcal{F}| \rfloor}{L} \quad (10)$$

其中， q 为星座大小， $|\mathcal{F}|$ 和 L 分别为码本 \mathcal{F} 的集合大小和码字长度（子载波数目）。

最小汉明距离是评价 CSS 性能的另一关键指标，它衡量码本中任意两个不同码字之间的最小差异。最小汉明距离越大，意味着该系统的检纠错能力越强。集合 \mathcal{F} 的最小汉明距离定义为

$$d_{\min}(\mathcal{F}) = \min \{d(\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k'}) : \mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k'} \in \mathcal{F}, k \neq k'\} \quad (11)$$

其中， $d(\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k'}) = \omega(\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_{k'})$ ， $\omega(\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_{k'})$ 代表

向量 $\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_k$ 的汉明重量。

为了更好地衡量不同长度码字的检纠错能力, 本文引入相对最小汉明距离概念, 具体定义为

$$\delta = \frac{d_{\min}}{L} \quad (12)$$

其中, L 为码字长度, d_{\min} 为长度为 L 的码字最小汉明距离。

1.5 受限广义布尔函数

RGBF 作为 GBF 的拓展, 本节首先介绍 GBF 的概念^[12], 再介绍 RGBF 的概念^[25]。

令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}_2^m$, 广义布尔函数 $f(\mathbf{x})$ 定义为一个从 $\{0, 1\}^m$ 到 \mathbb{Z}_q 的映射 f 。给定 $f(\mathbf{x})$, 定义

$$f = (f(0), f(1), \dots, f(2^m - 1)) \quad (13)$$

其中, $f(i) = f(i_1, i_2, \dots, i_m)$, (i_1, i_2, \dots, i_m) 为整数 $i = \sum_{k=1}^m i_k 2^{k-1}$ 的二进制向量表示。定义 $\psi(\mathbf{f}^{(2^m)})$ 为 $f^{(2^m)}$ 对应的长度为 2^m 的复数值序列, 写为

$$\psi(\mathbf{f}^{(2^m)}) = (\zeta^{f(0)}, \zeta^{f(1)}, \dots, \zeta^{f(2^m-1)}) \quad (14)$$

下面介绍 RGBF 的定义。假设有两个集合, 其中一个包含 v 个元素的集合 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_v\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$, 另一个是包含 $m - v$ 个元素的集合 $U' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_{m-v}\} \subset \{1, 2, \dots, m\} \setminus U$, 其中 $0 \leq v < m$ 。令 $\mathbf{x} = (x_{u_1}, x_{u_2}, \dots, x_{u_v})$, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_v)$, 其中 $d_l \in \{0, 1\}$, $1 \leq l \leq v$, $f|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}}$ 是通过将 f 中的变量 \mathbf{x} 限定为已知的 \mathbf{d} 来定义。对于 $\alpha = 1, 2, \dots, v$, 如果 $i_{u_\alpha} = d_\alpha$, 则复数值序列 $\psi(\mathbf{f}^{(2^m)})|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}}$ 的分量为 $\zeta^{f(i)}$, 否则为零。

设 L 、 k_1 和 k_0 为 3 个正整数, $k_0 = \sum_{\alpha=1}^v d_\alpha 2^{u_\alpha - 1}$, $k_1 = k_0 + \sum_{\alpha=1}^{m-v} 2^{u'_\alpha - 1}$ 。定义 $\psi(\mathbf{f}^{(L)})|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}}$ 为截断序列, 去掉前 k_0 个元素和后 $2^m - 1 - k_1$ 个元素得到的复值序列, 得到的序列长度为 $L = k_1 - k_0 + 1$ 。为了简化描述, 本文后面章节都用 $f|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}}$ 来表示 $\mathbf{f}^{(L)}|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}}$ 。

例 1 令 $q = 4$, $m = 3$, $v = 1$, $\mathbf{x} = (x_2)$, $\mathbf{d} = (0)$, 由 $\text{GBF} f = 2x_2x_1 + 2x_1x_3 + x_2$ 得到的序列为 $f = (00130211)$, 对应的复值序列为 $\psi(\mathbf{f}) =$

$(\zeta^0, \zeta^0, \zeta^1, \zeta^3, \zeta^0, \zeta^2, \zeta^1, \zeta^1)$ 。由 RGBF 得到的序列 $\psi(\mathbf{f})|_{x_2=0} = (\zeta^0, \zeta^0, 0, 0, \zeta^0, \zeta^2, 0, 0)$, 截断后 $L = 6$ 的序列为 $\psi(\mathbf{f})|_{x_2=0} = (\zeta^0, \zeta^0, 0, 0, \zeta^0, \zeta^2)$ 。

2 稀疏互补集的构造方法

为了得到更多满足不同频谱约束需求的 SCS, 同时使得到的 SCS 具有低 PAPR、高码率、大汉明距离, 本节在文献[23]得到的稀疏互补对基础上, 通过引入 RGBF 这类工具, 对参数 $K = 4$ 且具有集内非周期互相关零相关区的新 SCS 的直接构造方法进行研究。相较于文献[24], 本文得到的 SCS 可以实现零元素位置和数量的灵活调整, 可适应多样化的频谱需求。

定理 1 设 q 是偶数, m 和 v 是整数且满足 $m > 2$, $v \leq m - 2$, π 是集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 的排列且满足条件 $\pi(m) = m$, $\pi(m-1) = m-1$ 。令 $\mathbf{x} = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(v)})$ 和 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_v)$ 。RGBF 定义为

$$f_1|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}} = \frac{q}{2} \left(\sum_{s=1}^{m-2} x_{\pi(s)} x_{\pi(s+1)} + \sum_{s=1}^v \lambda_s x_{\pi(s)} x_m + \sum_{s=1}^{v-1} d_s d_{s+1} \right) + \sum_{s=1}^m \mu_s x_{\pi(v)} + \mu \quad (15)$$

$$f_2|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}} = f_1 + \frac{q}{2} x_m \quad (16)$$

$$f_3|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}} = f_1 + \frac{q}{2} x_{\pi(v+1)} \quad (17)$$

$$f_4|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}} = f_1 + \frac{q}{2} x_{\pi(v+1)} + \frac{q}{2} x_m \quad (18)$$

其中, $\mu, \mu_s, \lambda_s \in \mathbb{Z}_q$, 则序列集

$$\mathcal{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4) = (\psi(\mathbf{f}_1)|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}}, \psi(\mathbf{f}_2)|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}}, \psi(\mathbf{f}_3)|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}}, \psi(\mathbf{f}_4)|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}}) \quad (19)$$

是参数为 $(4, L, Z_A, S)$ 的 SCS, 其中 $L = \sum_{\alpha=v+1}^m 2^{\pi(\alpha)-1} + 1$,

$$Z_A = \sum_{\alpha=1}^v 2^{\pi(\alpha)-1} + 1, \quad S = \frac{L - 2^{m-v}}{L}。$$

证明 详见附录 1。

例 2 设 $q = 4$, $m = 5$, $v = 2$, $\pi = (1, 3, 2, 4, 5)$, 令 $\mathbf{x} = (x_1, x_3)$, $\mathbf{d} = (0, 0)$, 取 $\lambda_s = [1, 1]$, $\mu = 0$, $\mu_s = [1, 0, 0, 0, 0]$, 可得 4 个 RGBF 为

$$f_1|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}} = 2(x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_1x_5 + x_3x_5) + x_3$$

$$f_2|_{\mathbf{x}=\mathbf{d}} = f_1 + 2x_5$$

$$f_3|_{x=d} = f_1 + 2x_2$$

$$f_4|_{x=d} = f_1 + 2x_2 + 2x_5$$

集合 \mathcal{F} 可具体表示为

$$F_1 = (\zeta^0 0 \zeta^0 00000 \zeta^0 0 \zeta^2 00000 \zeta^0 0 \zeta^0 00000 \zeta^0 0 \zeta^2)$$

$$F_2 = (\zeta^0 0 \zeta^0 00000 \zeta^0 0 \zeta^2 00000 \zeta^2 0 \zeta^2 00000 \zeta^2 0 \zeta^0)$$

$$F_3 = (\zeta^0 0 \zeta^2 00000 \zeta^0 0 \zeta^0 00000 \zeta^0 0 \zeta^2 00000 \zeta^0 0 \zeta^0)$$

$$F_4 = (\zeta^0 0 \zeta^2 00000 \zeta^0 0 \zeta^0 00000 \zeta^2 0 \zeta^0 00000 \zeta^2 0 \zeta^2)$$

通过验证可知，例 2 得到的互补集 \mathcal{F} 是参数为 (4,27,6,19/27) 的 SCS 且具有低的 PAPR 值。图 1 展示了互补集 \mathcal{F} 的非周期自相关和，可知序列 F_1 、 F_2 、 F_3 和 F_4 在任何非零时移处的 AACs 都为零的特性。图 2 展示了序列 F_1 与 F_2 的非周期互相关值特性，可以看出 ZCZ 宽度为 6。图 3 展示了互补集 \mathcal{F} 的瞬时平均功率比，可知其峰值平均功率比为 3.849，小于理论界 4。

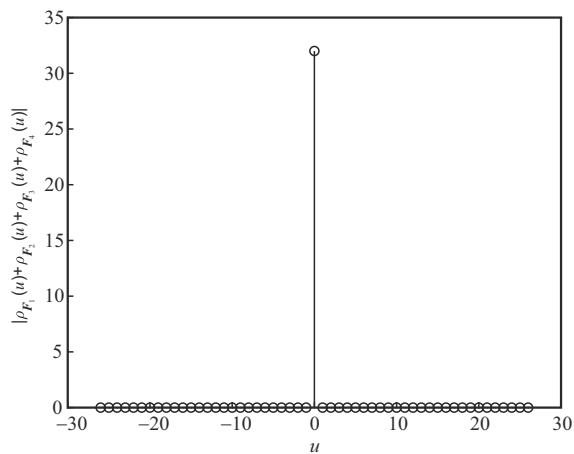


图 1 互补集 \mathcal{F} 的非周期自相关和

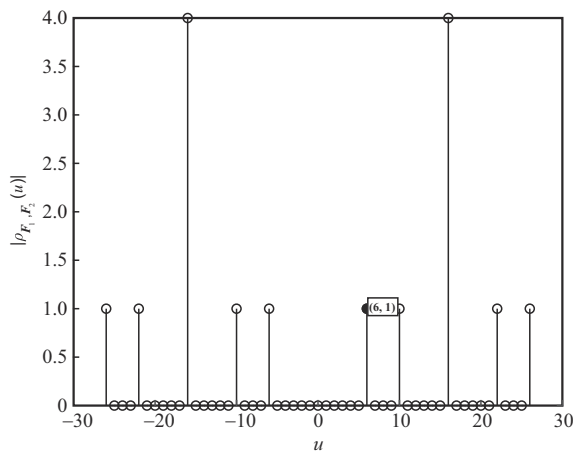


图 2 序列 F_1 与 F_2 的非周期互相关值

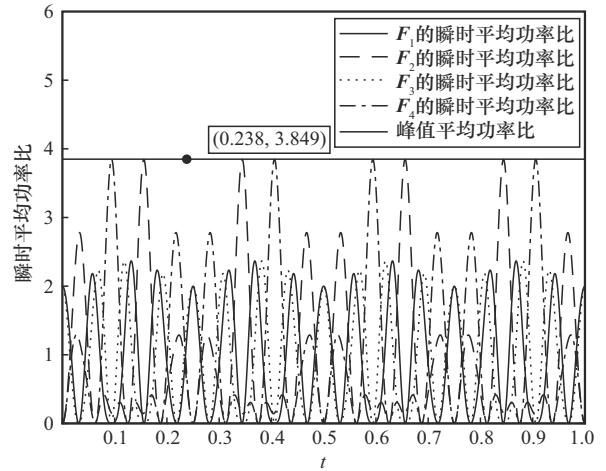


图 3 互补集 \mathcal{F} 的瞬时平均功率比

3 性能分析

3.1 得到的 SCS 的 PAPR 分析

用 P_1 表示集合 \mathcal{F} 的 PAPR 值，表 2 列出了 \mathcal{F} 在部分 m 和 v 条件下的 PAPR。通过表 2 可以看出，当参数 m 和 v 的奇偶性不同时， P_1 小于理论界，即 $P_1 < 4.000 0$ 。例如，序列集长度为 15、29、63、57 时， $P_1 < 4.000 0$ ，其他情况下 $P_1 = 4.000 0$ 。

表 2 \mathcal{F} 在部分 m 和 v 条件下的 PAPR

m	v	受限变量	L	P_1
3	1	x_1	7	4.000 0
4	1	x_1	15	3.442 5
4	2	$x_1 x_2$	13	4.000 0
5	1	x_1	31	4.000 0
5	2	$x_1 x_2$	29	3.442 5
5	3	$x_1 x_2 x_3$	25	4.000 0
6	1	x_1	63	3.654 3
6	2	$x_1 x_2$	61	4.000 0
6	3	$x_1 x_2 x_3$	57	3.442 5
6	4	$x_1 x_2 x_3 x_4$	49	4.000 0

3.2 得到的 SCS 的码率分析

由文献[24]可得，定理 1 生成 \mathcal{F} 的集合大小为 $v!(m-2-v)!q^{m+2v}$ ，设集合 \mathcal{F} 的码率 R_1 为

$$R_1 = \frac{\lfloor \log_q(v!(m-2-v)!q^{m+2v}) \rfloor}{\sum_{a=v+1}^m 2^{\pi(a)-1} + 1} \quad (20)$$

表3列出了 R_1 与 L 、 N 、 m 和 v 的关系。通过表3可知,对于给定的 m 和 v 值,随着零元素个数 N 的增加, R_1 呈下降趋势,如 $m = 3,4$ 时所示。这是因为在序列中插入零元素,虽然延长了序列的总长度,但并未增加有效码字的数量,因此导致了码率的降低。然而,当 m 值较大时,码率的降低幅度并未随 N 的增加而明显加剧,这是因为当 m 较大时,序列的冗余度对零元素数量的敏感度有所降低,如 $m = 5$ 时所示。此研究为后续实际应用的参数设置提供一定的理论依据。

表3 R_1 与 L 、 N 、 m 和 v 的关系

m	v	L	N	R_1
3	1	7	3	0.714 3
		14	6	0.428 6
4	1	15	7	0.400 0
		13	9	0.615 4
5	1	28	12	0.250 0
		30	14	0.233 3
		31	15	0.225 8
	2	26	18	0.346 2
		27	19	0.333 3
		29	21	0.310 3
3	25	21	0.480 0	

3.3 得到的SCS的最小汉明距离分析

本文提出的SCS构造方法与广义Reed-Muller码存在密切的内在联系,定理1生成的SCS可视为广义一阶Reed-Muller码 $RM_q(r,m)$ 的某二阶陪集中的码字,这是因为构造中采用的广义布尔函数 $f_{i|x=a} (i = 1,2,3,4)$ 是定义在二元域 Z_2 上的函数,其所有可能的线性组合构成了一个映射空间,该空间恰好是广义Reed-Muller码 $RM_q(2,m)$ 的一个子集。因此可得到定理1生成 \mathcal{F} 集合的最小汉明距离 d_{min} 为

$$d_{min} = 2^{m-1} - 2^v + 1 \quad (21)$$

以 $m = 3, 4, 5, 6$ 为例,表4列出了最小汉明距离 d_{min} 与参数 L 、 m 和 v 之间的关系。通过表4可知,最小汉明距离受参数 L 、 m 和 v 的共同影响,本文得到的SCS都具有较大的汉明距离,应用于系统具有较强的检纠错能力。

表4 d_{min} 与 L 、 m 和 v 的关系

m	v	L	d_{min}
3	1	7	3
4	1	15	7
5	1	31	15
5	2	29	13
6	1	63	31
6	2	61	29
6	3	57	25

3.4 对比分析

本节将本文得到的SCS与文献[12,23-24]进行对比。与文献[12]相比,本文得到的SCS突破了文献[12]得到的CSS不能满足频谱约束需求的不足。与文献[23]相比,本文将文献[23]得到的稀疏互补对扩展到了互补序列条数 $K = 4$ 的SCS,那么本文得到的SCS用于MIMO系统将更便于进行联合信道估计和有效的数据监测等。与文献[24]相比,本文得到的SCS由于考虑了集内非周期互相关ZCZ特性更利于抑制系统干扰;在谱零位置上,文献[24]通过把一对互正交的互补序列对拼接成一条互补序列实现在序列中间插零,即需要一对互正交的互补序列集拼接成一个互补序列集,本文SCS的互补序列通过改变RGBF中的受限变量可灵活实现多个位置元素为零,不局限于序列中间,更利于满足实际应用需求。以文献[24]中的例2为例,通过两对96长的相互正交互补序列集拼接成了长度为193的CSS,此CSS只在中间位置存在零元素;本文通过限定变量 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0$,可实现在3块不同区域直接进行插零。

本文的SCS除了以上优点外,在码率和最小汉明距离方面相较于文献[12,24]也有明显优势。表5列出了部分长度下本文与文献[12,24]的码率对比情况,其中,本文码率用 R_1 表示,文献[24]码率用 R_2 表示,文献[12]码率用 R_3 表示。通过表5可知, R_1 相较于 R_2 和 R_3 都有明显优势,当 $L = 49$ 时, R_1 比 R_2 高0.102 0,比 $L = 48$ 时 R_3 高0.118 2。

在最小汉明距离方面,为了更好地对比不同长度CSS的纠检错码能力,本文引入相对最小汉明距离,具体定义如式(12)所示,其中,文献[12]的最小汉明距离为 2^{m-3} ,文献[24]的最小汉明距离为 2^{m-2} 。表6展示了本文与文献[12,24]在相对最小汉

明距离方面的对比情况，其中， δ_1 表示本文的相对最小汉明距离， δ_2 表示文献[24]的相对最小汉明距离， δ_3 表示文献[12]的相对最小汉明距离。根据表6可知，在相同 m 、 ν 参数时，除 $m = 3$ 、 $\nu = 1$ 情况外，本文的相对最小汉明距离都大于文献[12]与文献[24]的相对最小汉明距离，说明本文的SCS具有更强的检纠错能力。

表5 不同 L 下的码率

L [本文,24]	R_1	R_2	L [12]	R_3
13	0.615 4	0.384 6	6	0.500 0
14	0.428 6	0.357 1	9	0.555 6
15	0.400 0	0.333 3	12	0.416 7
25	0.480 0	0.280 0	17	0.470 6
26	0.346 2	0.269 2	20	0.350 0
27	0.333 3	0.296 3	24	0.291 7
29	0.310 3	0.275 9	33	0.333 3
49	0.326 5	0.224 5	34	0.294 1
50	0.260 0	0.220 0	48	0.208 3
97	0.237 1	0.119 2	65	0.230 8
113	0.168 1	0.137 9	96	0.135 4

表6 相对最小汉明距离对比

m	ν	δ_1	δ_2	δ_3
3	1	0.428 6	0.666 7	0.333 3
4	1	0.466 7	0.400 0	0.200 0
5	1	0.483 9	0.444 4	0.222 2
5	2	0.448 3	0.400 0	0.200 0
6	1	0.492 1	0.470 6	0.235 3
6	2	0.475 4	0.444 4	0.222 2
6	3	0.438 6	0.400 0	0.200 0

4 结束语

本文围绕满足特定通信系统中频谱约束需求这一目标，提出了一类基于RGBF构造的SCS的方法，系统分析了其在PAPR、码率和最小汉明距离方面的性能特性。研究表明，该序列集在非周期自相关与互相关性能方面表现优异，尤其在ZCZ特性上具有显著优势。通过灵活设置受限变量，实现了对序列长度、零相关区宽度以及稀疏结构中零元素位置与数量的有效控制，从而增强了序列集在

多样化频谱约束场景中的适应能力。在系统性能方面，本文提出的稀疏互补集在满足参数 m 和 ν 奇偶性不同条件下，其PAPR可低于现有理论界限，有助于提升发射机功率效率并降低信号失真风险。与已有文献相比，本文构造在码率与最小汉明距离两个关键指标上均表现出优势，不仅提高了频谱利用率，也增强了系统的纠错与检错能力，对提升通信可靠性与数据传输效率具有实际意义。

附录1 定理1证明

为不失一般性，本文考虑 $\mathbf{d} = \mathbf{0}_\nu$ ，其中 $\mathbf{0}_\nu$ 是长度为 ν 的全零向量。由定理1得到的序列集为 $\mathcal{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4) = (\psi(\mathbf{f}_1)|_{x=a}, \psi(\mathbf{f}_2)|_{x=a}, \psi(\mathbf{f}_3)|_{x=a}, \psi(\mathbf{f}_4)|_{x=a})$ ，其中， \mathbf{F}_k 可写为 $\mathbf{F}_k = (F_{k,0}, F_{k,1}, \dots, F_{k,L-1})$ ， $k = 1, 2, 3, 4$ 。若 $(i_{\pi(1)}, i_{\pi(2)}, \dots, i_{\pi(\nu)}) \neq (d_1, d_2, \dots, d_\nu)$ ，则 $F_{k,i} = 0$ ；若 $\alpha = 1, 2, \dots, \nu$ ， $i_{\pi(\alpha)} = d_\alpha$ ，则 $F_{k,i} = \zeta^{f_k(i)}$ 。在此基础上证明式(3)和式(4)成立即可。

首先证明式(3)成立。由于 $\rho(\mathbf{F}_k; u) = \rho^*(\mathbf{F}_k; -u)$ 成立，当证明 \mathcal{F} 是大小为4的互补集时，只需证明 $u > 0$ 时 $\sum_{\mathbf{F}_k \in \mathcal{F}} \sum_{i=0}^{L-1-u} \zeta^{F_{k,i+u} - F_{k,i}} = \sum_{i=0}^{L-1-u} \sum_{\mathbf{F}_k \in \mathcal{F}} \zeta^{F_{k,i+u} - F_{k,i}} = 0$ 。对于任意整数 i 和 j ，设 $j = i + u$ ，且 (j_1, j_2, \dots, j_m) 和 (i_1, i_2, \dots, i_m) 分别是整数 $j = \sum_{l=1}^m j_l 2^{l-1}$ 和 $i = \sum_{l=1}^m i_l 2^{l-1}$ 的二进制表示。考虑到若 $(j_{\pi(1)}, j_{\pi(2)}, \dots, j_{\pi(\nu)}) \neq (d_1, d_2, \dots, d_\nu)$ 或 $(i_{\pi(1)}, i_{\pi(2)}, \dots, i_{\pi(\nu)}) \neq (d_1, d_2, \dots, d_\nu)$ ，则 $F_{k,j} F_{k,i}^* = 0$ ，因此，整个证明过程中只需要关注非零元素的乘法，也就是 $F_{k,j} F_{k,i}^* \neq 0$ ，这也意味着 $(j_{\pi(1)}, j_{\pi(2)}, \dots, j_{\pi(\nu)}) = (i_{\pi(1)}, i_{\pi(2)}, \dots, i_{\pi(\nu)}) = (d_1, d_2, \dots, d_\nu)$ 。下面从4个方面进行讨论。

情况1: 如果 $i_m \neq j_m$ ，则对于任意的序列 $\mathbf{F}_k \in \mathcal{F}$ ，存在 $\mathbf{F}'_k = (F'_{k,0}, F'_{k,1}, \dots, F'_{k,L-1}) = \mathbf{F}_k + \frac{q}{2} x_m \in \mathcal{F}$ ，能够使 $F_{k,j} - F_{k,i} - F'_{k,j} + F'_{k,i} = \frac{q}{2}(i_m - j_m) \equiv \frac{q}{2} \pmod{q}$ ，可以得到 $\frac{\zeta^{F_{k,j} - F_{k,i}}}{\zeta^{F'_{k,j} - F'_{k,i}}} = \zeta^{\frac{q}{2}} = -1$ ，即 $\zeta^{F_{k,j} - F_{k,i}} + \zeta^{F'_{k,j} - F'_{k,i}} = 0$ 。因此有 $\sum_{\mathbf{F}_k \in \mathcal{F}} \zeta^{F_{k,i+u} - F_{k,i}} = 0$ 。

情况2: 如果 $i_{\pi(\nu+1)} \neq j_{\pi(\nu+1)}$ ，那么就会存在 $\mathbf{F}'_k = (F'_{k,0}, F'_{k,1}, \dots, F'_{k,L-1}) = \mathbf{F}_k + \frac{q}{2} x_{\pi(\nu+1)} \in \mathcal{F}$ ，能够使 $\zeta^{F_{k,j} - F_{k,i}} + \zeta^{F'_{k,j} - F'_{k,i}} = 0$ ，与情况1类似，也有 $\sum_{\mathbf{F}_k \in \mathcal{F}} \zeta^{F_{k,i+u} - F_{k,i}} = 0$ 。

情况3: 如果 $i_{\pi(\nu+1)} = j_{\pi(\nu+1)}$ ， $i_m = j_m = 0$ ，设 t 是满足 $i_{\pi(t)} \neq j_{\pi(t)}$ 的最小整数， i' 和 j' 分别是在位置 $\pi(t-1)$ 上不同于 i 和 j 的整数，即 $i'_{\pi(t-1)} = 1 - i_{\pi(t-1)}$ ， $j'_{\pi(t-1)} = 1 - j_{\pi(t-1)}$ ， $j' = i' + u$ ，则可以得到

$$\begin{aligned}
 & F_{k,i}' - F_{k,i} = \\
 & \frac{q}{2} \left(i_{\pi(t-2)} i_{\pi(t-1)}' - i_{\pi(t-2)} i_{\pi(t-1)} + i_{\pi(t-1)}' i_{\pi(t)} - \right. \\
 & \left. i_{\pi(t-1)} i_{\pi(t)} + \lambda_{t-1} i_{\pi(t-1)}' i_m - \lambda_{t-1} i_{\pi(t-1)} i_m \right) + \\
 & \mu_{t-1} i_{\pi(t-1)}' - \mu_{t-1} i_{\pi(t-1)} \equiv \\
 & \frac{q}{2} \left(i_{\pi(t-2)} + i_{\pi(t)} + \lambda_{t-1} i_m \right) + \\
 & \mu_{t-1} - 2\mu_{t-1} i_{\pi(t-1)} \pmod{q}
 \end{aligned}$$

第一个等式由*i*和*i'*只在一个位置 $\pi(t-1)$ 上不同得出。假设 $t \geq 3$, 对于 $t=2$ 的情况, 可以把前面方程中涉及 $t-2$ 的项去掉, 同时因为 $i_{\pi(t-2)} = j_{\pi(t-2)}$, $i_{\pi(t-1)} = j_{\pi(t-1)}$, 可得

$$\begin{aligned}
 & F_{k,j} - F_{k,i} - F_{k,j}' + F_{k,i}' \equiv \\
 & \frac{q}{2} \left(i_{\pi(t-2)} - j_{\pi(t-2)} + i_{\pi(t)} - j_{\pi(t)} + \lambda_{t-1} i_m - \right. \\
 & \left. \lambda_{t-1} j_m \right) - 2\mu_{t-1} \left(i_{\pi(t-1)} - j_{\pi(t-1)} \right) \equiv \\
 & \frac{q}{2} \left(i_{\pi(t)} - j_{\pi(t)} \right) \equiv \frac{q}{2} \pmod{q}
 \end{aligned}$$

即 $\zeta^{F_{k,j} - F_{k,i}} + \zeta^{F_{k,i}' - F_{k,j}'} = 0$ 。因此可以得到 $\sum_{F_k \in \mathcal{F}} \left(\zeta^{F_{k,i} + u - F_{k,i}} + \zeta^{F_{k,i}' + u - F_{k,i}'} \right) = 0$ 。

情况4: 如果 $i_{\pi(v+1)} = j_{\pi(v+1)}$, $i_m = j_m = 1$, 即 $ij \leq$

$\sum_{\alpha=v+1}^m 2^{\pi(\alpha)-1} + 1$ 。为了简单起见, 令 $\sigma(\alpha) = \pi(m+1-\alpha)$ 。假设 β 是满足 $i_{\sigma(\beta)} \neq j_{\sigma(\beta)}$ 的最小整数, i' 和 j' 分别是在位置 $\sigma(\beta-1)$ 上不同于 i 和 j 的整数, 即 $i'_{\sigma(\beta-1)} = 1 - i_{\sigma(\beta-1)}$, $j'_{\sigma(\beta-1)} = 1 - j_{\sigma(\beta-1)}$, 接下来可以得到 $i'j' \leq \sum_{\alpha=v+1}^m 2^{\pi(\alpha)-1} - 2^{\sigma(\beta-1)} + 1 < L$ 。因此, 与情况3相似, 存在 i' 和 j' 使 $\zeta^{F_{k,j} - F_{k,i}} + \zeta^{F_{k,i}' - F_{k,j}'}$ 也等于0, 也可以得到 $\sum_{F_k \in \mathcal{F}} \left(\zeta^{F_{k,i} + u - F_{k,i}} + \zeta^{F_{k,i}' + u - F_{k,i}'} \right) = 0$ 。

综合情况1到情况4, 可知式(3)成立。接下来证明式(4)成立。

当 $k = k'$ 时, 需要考虑的是序列集 \mathcal{F} 的非周期自相关, 情况1~情况4已证明过, 不再重复。

当 $k \neq k'$ 且 $u \neq 0$ 时, 需要证明 $0 < u < Z_A$ 时 $\rho(\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k'}; u) = 0$ 成立。因为 $\pi(m) = m$, 与情况4类似, 可以得到 $i_m = j_m$, 因此有 $i_{\pi(m)} = j_{\pi(m)}$ 。为了简单起见, 令 $\sigma(\alpha) = \pi(m+1-\alpha)$, 假设 β 是满足 $i_{\sigma(\beta)} \neq j_{\sigma(\beta)}$ 的最小整数, 且 i' 和 j' 分别是在位置 $\sigma(\beta-1)$ 上不同于 i 和 j 的整数, 同情况3和情况4类似, 可以得到 $\zeta^{F_{k,j} - F_{k,i}} + \zeta^{F_{k,i}' - F_{k,j}'}$ 也等于0。

当 $k \neq k'$, $u = 0$ 时, 需要证明 $\rho(\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k'}; 0) = 0$ 。由于 $i_{\pi(\alpha)} = d_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq v$, 那么可得 $\rho(\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k'}; 0) = \sum_{i=0}^{L-1} F_{k,i} F_{k',i}^*$ 。

假设 $k = 1$, $k' = 3$, 则 $\rho(\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k'}; 0) = \sum_{i=0}^{L-1} F_{1,i} F_{3,i}^* = \zeta^{\frac{q}{2} i_{\pi(v+1)}}$, 其中 $i_{\pi(v+1)}$ 是 i 的二进制表示的第 $\pi(v+1)$ 位。根据文献[29]中注解1可知, 每条序列有 2^{m-v} 个非零元素, 因此可以找到 2^{m-v-1} 对满足 $\zeta^{F_{1,i} - F_{3,i}} = \zeta^{\frac{q}{2}} = -1$ 的序列, 以及另外的

2^{m-v-1} 对满足 $\zeta^{F_{1,i} - F_{3,i}} = \zeta^0 = 1$ 的序列。因此可得到 $\rho(\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k'}; 0) = 0$ 。同理, 当 k 和 k' 分别取 $\{1,2,3,4\}$ 时, 证明方法类似。证毕。

参考文献:

- [1] GOLAY M. Complementary series[J]. IRE Transactions on Information Theory, 1961, 7(2): 82-87.
- [2] TSENG C C, LIU C. Complementary sets of sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1972, 18(5): 644-652.
- [3] WELTI G. Quaternary codes for pulsed radar[J]. IRE Transactions on Information Theory, 1960, 6(3): 400-408.
- [4] SPASOJEVIC P, GEORGHIADES C N. Complementary sequences for ISI channel estimation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(3): 1145-1152.
- [5] BOYD S. Multitone signals with low crest factor[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2003, 33(10): 1018-1022.
- [6] CHEN W, TELLAMBURA C. Identifying a class of multiple shift complementary sequences in the second order cosets of the first order Reed-Muller codes[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Communications, 2005. ICC 2005.2005. Piscataway: IEEE Press, 2005: 618-621.
- [7] VAN NEE R D J. OFDM codes for peak-to-average power reduction and error correction[C]//Proceedings of the Proceedings of GLOBECOM'96.1996 IEEE Global Telecommunications Conference. Piscataway: IEEE Press, 1996: 740-744.
- [8] WANG B, HO P H, LIN C H. OFDM PAPR reduction by shifting null subcarriers among data subcarriers[J]. IEEE Communications Letters, 2012, 16(9): 1377-1379.
- [9] DAVIS J A, JEDWAB J. Peak-to-mean power control in OFDM, Golay complementary sequences, and Reed-Muller codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1999, 45(7): 2397-2417.
- [10] FIEDLER F, JEDWAB J, PARKER M G. A framework for the construction of Golay sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(7): 3114-3129.
- [11] PATERSON K G. Generalized Reed-Muller codes and power control in OFDM modulation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46(1): 104-120.
- [12] CHEN C Y. Complementary sets of non-power-of-two length for peak-to-average power ratio reduction in OFDM[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(12): 7538-7545.
- [13] CHEN C Y. A new construction of golay complementary sets of non-power-of-two length based on Boolean functions[C]//Proceedings of the 2017 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC). Piscataway: IEEE Press, 2017: 1-6.
- [14] CHEN C Y. A novel construction of complementary sets with flexible lengths based on Boolean functions[J]. IEEE Communications Letters, 2017, 22(2): 260-263.
- [15] WANG Z L, XUE E Z, CHAI J J. A method to construct complementary sets of non-power-of-two length by concatenation[C]//Proceedings of the 2017 Eighth International Workshop on Signal Design and Its Applications in Communications (IWSDA). Piscataway: IEEE Press, 2017: 24-28.
- [16] ROBIN C, TAROKH V. A construction of OFDM 16-QAM sequences having low peak powers[J]. IEEE Transactions on Information

- Theory, 2001, 47(5): 2091-2094.
- [17] CHONG C V, VENKATARAMANI R, TAROKH V. A new construction of 16-QAM Golay complementary sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2003, 49(11): 2953-2959.
- [18] AHMADI S. Mobile WiMAX: a systems approach to understanding IEEE 802.16m radio access technology[M]. Amsterdam: Elsevier, 2011
- [19] HAMILTON B R, MA X L, KLEIDER J E, et al. OFDM pilot design for channel estimation with null edge subcarriers[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2011, 10(10): 3145-3150.
- [20] TSAI L S, CHUNG W H, SHIU D S. Synthesizing low autocorrelation and low PAPR OFDM sequences under spectral constraints through convex optimization and GS algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(5): 2234-2243.
- [21] MAHMOUD H A, YUCEK T, ARSLAN H. OFDM for cognitive radio: merits and challenges[J]. IEEE Wireless Communications, 2009, 16(2): 6-15.
- [22] LIU Z L, GUAN Y L, PARAMPALLI U, et al. Spectrally-constrained sequences: bounds and constructions[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2018, 64(4): 2571-2582.
- [23] PAI C Y, LIU Z L, LI C L, et al. Sparse complementary pairs with additional aperiodic ZCZ property[C]//Proceedings of the 2023 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Piscataway: IEEE Press, 2023: 672-677.
- [24] ZHOU Y J, YANG Y, ZHOU Z C, et al. New complementary sets with low PAPR property under spectral null constraints[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2020, 66(11): 7022-7032.
- [25] SCHMIDT K U. Complementary sets, generalized reed - muller codes, and power control for OFDM[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(2): 808-814.
- [26] CAO G Z, BACHEGA L R, BOUMAN C A. The sparse matrix transform for covariance estimation and analysis of high dimensional signals[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 20(3): 625-640.
- [27] ZHANG Z, XU Y, YANG J, et al. A survey of sparse representation: algorithms and applications[J]. IEEE Access, 2015, 3: 490-530.
- [28] KUMAR P, MAJHI S, PAUL S. A direct construction of golay complementary pairs and binary complete complementary codes of length non-power of two[J]. IEEE Transactions on Communications, 2023, 71(3): 1352-1363.
- [29] LIU Z L, GUAN Y L. 16-QAM almost-complementary sequences with low PMEPR[J]. IEEE Transactions on Communications, 2016, 64(2): 668-679.

[作者简介]



彭秀平 (1984-), 女, 安徽安庆人, 博士, 燕山大学教授, 主要研究方向为无线通信信号波形设计、通感一体化波形设计、组合设计编码、Zak 变换技术等。



王雪健 (1998-), 男, 河南周口人, 燕山大学硕士生, 主要研究方向为互补序列设计与编码理论。



蔡德娇 (2001-), 女, 山东济宁人, 燕山大学硕士生, 主要研究方向为互补序列设计与编码理论。